EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES

DURÉE : 3 heures

Indiquer lisiblement le numéro de la question traitée. On pourra admettre les résultats de questions précédentes non traitées.

NOTATIONS

I est l'intervalle $I = [-1, +1]$ de l'ensemble **R** des réels.

C(I) est l'ensemble des fonctions continues de I dans **R**.

Pour tout $y \in C(I)$ on pose $\| y \| = \sup_{x \in I} | y(x) |$.

Pour deux fonctions y et z appartenant à C(I) l'écriture $y \leqslant z$ signifie :

$$\forall x \in I \qquad y(x) \leqslant z(x) .$$

$C_0^2(I)$ est l'ensemble des fonctions $y \in C(I)$ qui vérifient

$$y(-1) = y(+1) = 0$$

et qui sont deux fois dérivables dans $]-1, +1[$

$\left(\text{par exemple : } y = 1 - x^2 , y = \cos \frac{\pi x}{2}\right)$.

I

Soit $y \in C_0^2(I)$.

1° Soit $x_1 \in]-1, +1[$. On pose $z(x) = y(x) - y(x_1) \dfrac{x^2-1}{x_1^2-1}$.

On a $z(-1) = z(x_1) = z(+1) = 0$. En déduire qu'il existe $c_1 \in I$ tel que $z''(c_1) = 0$. Calculez z''. En déduire que :

(P_0) Pour tout $x \in I$, il existe $c \in I$ tel que $y(x) = \dfrac{x^2-1}{2} y''(c)$.

2° Montrer que :

(P_1) $\qquad y'' \geqslant 0$ implique $y \leqslant 0$

(P_2) $\qquad y'' \leqslant 0$ implique $y \geqslant 0$

(P_3) $\qquad \| y \| \leqslant \dfrac{1}{2} \| y'' \|$.

II

1° Soit $v \in C(I)$; pour tout x appartenant à I, on pose :

$$\alpha(x) = \int_{-1}^{x} (1+t)\, v(t)\, dt \quad , \quad \beta(x) = \int_{1}^{x} (1-t)\, v(t)\, dt \quad ,$$

$$u(x) = \frac{x-1}{2} \alpha(x) + \frac{x+1}{2} \beta(x) .$$

Montrer que u est l'*unique* solution de l'équation

(E) $\qquad u'' = v , \quad u \in C_0^2(I)$.

Cette équation est, d'après la définition de $C_0^2(I)$ équivalente à

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} \forall x \in I & u''(x) = v(x) \\ & u(-1) = u(+1) = 0 . \end{cases}$$

2° Soit (v_n) une suite de fonctions appartenant à C(I), telle que v_n converge uniformément vers une fonction $v \in C(I)$ (c'est-à-dire $\lim_{n \to +\infty} \| v_n - v \| = 0$). Soit u_n la solution unique de l'équation

(E_n) $\qquad u''_n = v_n \quad , \quad u_n \in C_0^2(I)$.

Montrer que u_n converge uniformément vers la solution de l'équation (E), et que u'_n converge uniformément vers u'.

III

Dans la suite de ce problème on note f une fonction continûment dérivable de **R** dans **R** telle que

$$(H_1) \qquad \begin{cases} \forall x \in \mathbf{R} & | f'(x) | \leqslant k \\ & k \text{ étant un réel strictement inférieur à } 2 . \end{cases}$$

1° Soit $y \in C_0^2(I)$. Montrer qu'il existe une fonction z et une seule telle que :

(R) $\qquad z \in C_0^2(I)$ et $\forall x \in I \qquad z''(x) = f(y(x))$.

On note **F** l'application de $C_0^2(I)$ dans lui-même définie par $z = \mathbf{F}(y)$ où z est la solution de l'équation (R).

2° Écrire l'équation $y = \mathbf{F}(y)$ dans le cas de la fonction f suivante :

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad f(\alpha) = \alpha - 1 .$$

Résoudre cette équation.

3° Soit y_1 et y_2 appartenant à $C_0^2(I)$, et soit $z_1 = \mathbf{F}(y_1)$ et $z_2 = \mathbf{F}(y_2)$. Montrer que $\| z''_1 - z''_2 \| \leqslant k \| y_1 - y_2 \|$; puis, montrer, en utilisant (P_3) que $\| z_1 - z_2 \| \leqslant \frac{k}{2} \| y_1 - y_2 \|$.

4° Déduire de III, 3° que l'équation $y = \mathbf{F}(y)$ a au plus une solution.

5° Soit $y_0 \in C_0^2(I)$. On définit la suite (y_n) par récurrence en posant $y_{n+1} = \mathbf{F}(y_n)$. Poser $u_n = y_{n+1} - y_n$ et montrer successivement que :

(a) $\| u_n \| \leqslant \left(\frac{k}{2}\right)^n \| u_0 \|$,

(b) La suite (y_n) converge uniformément vers une fonction continue y,

(c) La suite $(f \circ y_n)$ converge uniformément vers la fonction $f \circ y$.

Enfin en utilisant II, 2° montrer que :

(S) $\forall x \in I \quad y''(x) = f(y(x))$ et $y(+1) = y(-1) = 0$.

En conclure que l'équation (S) admet la solution unique y.

IV

On suppose en outre que la fonction f vérifie :

(H_2) $\forall x \in \mathbf{R} \quad 0 \leqslant f'(x) \leqslant k < 2$.

(H_3) $\forall x \in \left[0, -\frac{1}{2} f(0)\right] \quad f(x) \leqslant 0$.

On remarquera que (H_2) implique (H_1).

1° Quelles sont parmi les fonctions suivantes celles qui vérifient (H_2) et (H_3) ?

(a) $f(\alpha) = \alpha - \cos \alpha$

(b) $f(\alpha) = \alpha - 0{,}9 \cos \alpha$

(c) $f(\alpha)$ $\begin{cases} = -1 \text{ pour } \alpha \leqslant 0 \\ = -1 + \alpha^2 \text{ pour } 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2} \\ = -\frac{5}{4} + \alpha \text{ pour } \alpha \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$.

2° On pose $y_0 = 0$ et $y_{n+1} = \mathbf{F}(y_n)$ pour tout entier n, comme au III. Calculer y_1 et montrer que :

$$\forall x \in I \qquad 0 \leqslant y_1(x) \leqslant -\frac{1}{2} f(0) .$$

En déduire, en utilisant (P_1) et (P_2) [voir I, 2°] que $y_1 \geqslant y_2 \geqslant 0$.

Démontrer par récurrence que :

$$y_0 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_{2n} \leqslant y_{2n+1} \leqslant y_{2n-1} \leqslant \cdots \leqslant y_3 \leqslant y_1 .$$

En déduire que $y_{2n} \leqslant y \leqslant y_{2n+1}$, où y est la solution unique de l'équation (S) [voir III, 5° et III, 4°].

3° Soit f la fonction donnée au IV, 1°, (c).

Trouver un polynôme P tel que :

$$\| P - y \| \leqslant 0{,}05 \text{ et } P(-1) = P(+1) = 0 ,$$

où y est la solution de (S).

4° L'équation :

$$u'' = -1 + u^2 , \quad u(-1) = u(+1) = 0$$

a-t-elle une solution? Cette solution est-elle unique?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail